Twierdzenie. Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Dowód twierdzenia

Dowód nie wprost. Załóżmy przeciwnie, że liczb pierwszych jest tylko skończona ilość. Oznaczmy je przez

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Stwórzmy liczbę

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

Liczba N przy dzieleniu przez dowolną z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_n$ daje resztę 1. Zatem żadna z tych liczb pierwszych nie dzieli N.

Każda liczba większa od 1 jest albo liczbą pierwszą, albo ma dzielnik pierwszy q.

Dzielnik q nie może być żadną z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ponieważ żadna z nich nie dzieli liczby N.

Otrzymujemy więc liczbę pierwszą q, której nie było na naszej rzekomo pełnej liście wszystkich liczb pierwszych. Jest to sprzeczność.

Zatem założenie o skończonej liczbie liczb pierwszych jest fałszywe. Więc zatem liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

□